

ფუნქციები და მათი სწავლების საკითხები

მოამზადა ეკა კორძაძემ

გზამკვლევი



სარჩევი

შესავალი.	3
ფუნქციის ინტუიციური განსაზღვრა.	3
ფუნქციის გრაფიკი.	8
შექცეული ფუნქცია.	14
ფუნქციათა კომპოზიცია.	16
ფუნქციებთან დაკავშირებული ამოცანები.	17
ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა.	19
ექვივალენტობის მიმართება.	20
მრავალი ცვლადის ფუნქციები.	21

ფუნქციები

შესავალი

ფუნქციის ცნება უდავოდ ცენტრალურია მათემატიკის სასკოლო პროგრამაში და მისი სრულყოფილად გააზრებული ცოდნა დაეხმარება მასწავლებელს სწორად და ჰარმონიულად წარმართოს მოსწავლეებთან ამ ძირითადი თემის სწავლება.

მათემატიკაში ძნელია დასახედდეს საკითხი, რომელიც მეტ-ნაკლებად არ უკავშირდება ფუნქციებს. რამდენადაც მათემატიკის სწავლება ზოგადად ემსახურება მოზარდში აბსტრაქტული აზროვნების უნარის ჩამოყალიბებას, თამამად შეიძლება ითქვას, რომ ფუნქციების თემის ეტაპობრივი ათვისება არსებით როლს თამაშობს ამგვარი უნარ-ჩვევების განვითარებაში.

მათემატიკის სწავლით საშუალება გვეძლევა ჩაწვდეთ ღრმად და დავინახოთ კანონზომიერებები მათემატიკურ სტრუქტურებში, მაგრამ ეს სწავლება ვერ მოხერხდება მხოლოდ ყურებით (თვალიერებით), ისევე როგორც ცურვას ან მანქანის ტარებას ვერ ვისწავლით მხოლოდ ახსნა-განმარტებებით (თუმცა ესეც საჭიროა). მიგვაჩნია, რომ გადმოცემულია ფუნდამენტური ცნებები მარტივი, ყველასათვის ხელმისაწვდომი ენით. ამიტომ ეს მასალა უპირველეს ყოვლისა წარმოადგენს სამუშაო იარაღს, რითაც საკუთარი მათემატიკური თვალსაზრისების „კულტივაცია“ უნდა მოხდეს თითოეულ წაკითხულ აბზაცზე შეძლებისდაგვარად ხანგრძლივი ფიქრის გზით.

ფუნქციის ინტუიციური განსაზღვრა.

ძირითად სიძნელეს ფუნქციების შესწავლისას წარმოადგენს თავად ამ ცნების განსაზღვრება, რომელიც აბსტრაგირების სხვადასხვა დონეზე იმდენად სხვადასხვაგვარად გამოიყურება, რომ ერთი შეხედვით შეუძლებელიცაა მათ შორის საერთო ხაზის აღმოჩენა. პირველი შეხებით ფუნქცია ეს არის კავშირი დამოკიდებულ და დამოუკიდებელ ცვლადებს შორის, წესი რომლითაც ერთ ელემენტს შეესაბამება მეორე, ფორმულა $y = f(x)$, გრაფიკი გამოხატული საკოორდინატო სისტემაზე, და ა. შ. გარდა იმისა, რომ მასწავლებელს სრულყოფილად უნდა ჰქონდეს გააზრებული ფუნქციის ყველა შესაძლო განსაზღვრა და მათ შორის კავშირი, მან მთელი თავის ოსტატობა უნდა ჩააქსოვოს გაკვეთილების განმავლობაში ამ თემაზე საუბრისას, რათა მოახერხოს რომ თითოეული მოსწავლისთვის მისთვის გასაგებ ენაზე ჩამოაყალიბოს ეს განსაზღვრა. იგულისხმება, რომ კლასში ყველა მოსწავლე ვერ ჩაწვდება ფუნქციის ცნების აბსტრაქტულ განსაზღვრას, მაგრამ ყველა მოსწავლეს უნდა შეეძმნას “საკუთარი სწორი წარმოდგენა” ფუნქციების შესახებ.

სანამ ფუნქციის ცნების განსაზღვრას შევეცდებოდეთ, მცირე ხნით შევჩერდეთ თავად განსაზღვრების როლზე და ადგილზე მათემატიკაში. დავფიქრდეთ იმაზეც შეგვიძლია თუ არა ყველა ცნების განსაზღვრა. ნიმუშად ავიღოთ რაიმე მარტივი განსაზღვრა, ვთქვათ პარალელოგრამის: “*პარალელოგრამი არის ისეთი ოთკუთხედი, რომლის მოპირდაპირე გვერდები პარალელურია*”. როგორც ვხედავთ ამ განსაზღვრებაში ჩვენ გამოვიყენეთ უკვე ცნობილი ცნებები *ოთკუთხედის*, *მოპირდაპირე გვერდების*,

პარალელობის. თუ დავაკვირდებით ეს სიტუაცია ტიპიურია, ყოველი ახალი ცნება უკვე ცნობილი ცნებების საშუალებით უნდა განისაზღვროს. ანუ, თუ ამ ცნებებს “კიბის საფეხურებზე” დალაგებულად წარმოვიდგენთ, ცნობილ ცნებებზე დაყრდნობით ავდივართ ახალ საფეხურზე. თუ ეხლა ამ კიბეზე დამშვებას დავიწყებთ და დავაკვირდებით თითოეული ცნების საყრდენ ცნებებს, არ შეიძლება ეს დამშვება უსასრულოდ გრძელდებოდეს. უნდა არსებობდნენ ისეთი ცნებები, რომელთაც უფრო მარტივი ცნებების საშუალებებით ვეღარ განსაზღვრავთ. ასეთ ცნებებს *საწყის ცნებებს* უწოდებენ და მათ მაგალითებს წარმოადგენენ *წერტილი, წრფე, სიბრტყე, სიმრავლე, რიცხვი* და ა.შ. (ანალოგიური სიტუაციაა ცნებათა შორის დამოკიდებულებების შესწავლისას, რაც მათემატიკაში ყალიბდება გარკვეული დებულებების სახით, რომლებსაც *თეორემებს* ან *ლემებს* ვუწოდებთ. თითოეული თეორემის დამტკიცებისას ვიყენებთ შედარებით მარტივ, უკვე ცნობილ დებულებებს და ვინაიდან აქაც შეუძლებელია “ქვედა საფერურებზე” დამშვება უსასრულოდ გრძელდებოდეს, იძულებულნი ვართ ზოგიერთი საწყისი დებულება დაუმტკიცებლად მივიღოთ. ამგვარ დებულებებს *აქსიომები* ეწოდება. მათი სამართლიანობა ბუნებრივად ცხადად გვეჩვენება*)

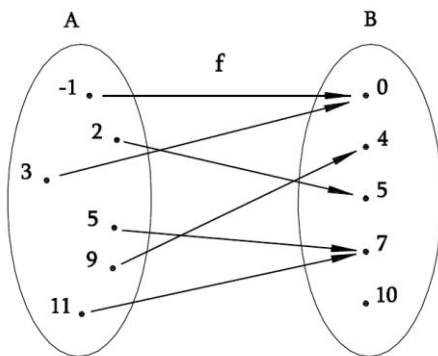
როგორც ვხედავთ ზუსტი განსაზღვრის არ მქონე საწყისი ცნებების არსებობა ყოველი მათემატიკურად მწყობრი თეორიისთვის აუცილებელია, მაგრამ ეს არ ნიშნავს, რომ ორაზროვნება დაუშვათ ამ ცნებების წარმოსახვაში, მით უმეტეს სწავლების პროცესში. კარგად უნდა გავერკვეთ, რომ საწყისი ცნებებისთვის არ არსებობს ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრა, თორემ ჩვენი ახსნებით ეს ცნებები მაქსიმალურად ნათელი და არაბუნდოვანი უნდა გახდეს მოსწავლეთათვის. ჩვენ აქ არ მოვიტანთ ამგვარი ახსნა-განმარტებების ტიპიურ ნიმუშებს, რადგან ამით ძალიან გადაუხვევდით თემიდან.**

ფუნქცია არ წარმოადგენს საწყის ცნებას. იგი არ არის იმდენად მარტივი, რომ საწყის ცნებად გამოვაცხადოთ და მის მკაცრ განსაზღვრაზე აღარ ვიზრუნოთ. ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრის ჩამოყალიბების სიძნელე დიამეტრულად საწინააღმდეგო ხასიათისაა. რაოდენაც პარადოქსულად არ უნდა ჟღერდეს მკითხველისათვის, რომელიც დარწმუნებულია მათემატიკის როგორც ზუსტი მეცნიერების ბუნებაში, საჭირო სიახლეების შემოტანა მათემატიკაში, ისევე როგორც ყველა საბუნებისმეტყველო მეცნიერებაში, თავდაპირველად ზოგადი ინტუიციის მოშველიებით ხდება და მათი გარკვევა, დაზუსტება და წესებად ფორმირება მხოლოდ დროთა განმავლობაში ხერხდება. ფუნქციის ფორმალური განსაზღვრა, რასაც დღეს შეიძლება ნებისმიერ სასკოლო სახელმძღვანელოში წავაწყდეთ, საუკუნეების განმავლობაში ყალიბდებოდა, ფორმას იცვლიდა და იხვეწებოდა. ისტორიას შემორჩა ლამის ყველა მეცნიერის სახელიც, რომელთაც საკუთარი წვრილი შეიტანეს ამ ფუნდამენტური ცნების ფორმირებაში. ამიტომაც გასაკვირი არაა, რომ მოსწავლეთა მიერ ამ საკითხის შესწავლა ერთი ხელის მოსმით ვერ მოხერხდება. ისინი დასახული მიზნისკენ ნელ-ნელა, ეტაპობრივად, მასწავლებლის დახმარებით და საკუთარი მონაწილეობის შეგრძნებით უნდა მივიღწეოთ.

*) თუმცა მეცნიერების განვითარების გარკვეულ საფეხურზე შეიძლება რომელიმე ეს თვალსაზრისი გადაისინჯოს, რის კლასიკურ ნიმუშსაც წარმოადგენს ევკლიდეს V აქსიომა. შეიძლება მოხდეს საწყის ცნებაზე წარმოდგენის ცვლილებაც, როგორც მაგალითად *წრფის* ცნება არაევკლიდურ გეომეტრიაში, ან *დროის* ცნება აინშტაინის ფარდობითობის თეორიაში.

**) თუმცა ხაზი უნდა გავუსვათ საწყისი ცნებების სიმარტივეს, რამდენადაც მათზე მარტივი ცნებების შემოტანა წარმოუდგენლად გვესახება, კარგი იქნება თუკი მასწავლებელი თუნდაც ერთხელ ახსენებს გაკვეთილებზე ამ ცნებების, ისევე როგორც მთლიანად მათემატიკის, აბსტრაქტულ ბუნებას. რომ ცარცით დაფაზე დასმული წერტილი წარმოადგენს მხოლოდ თვალსაჩინოებას მათემატიკური აბსტრაქტული წერტილისა, რომელსაც არ გააჩნია არავითარი სიგრძე და სისქე, რომ ბუნებაში არსებობს 7 ქვა, 7 ხე, 7 ცხვარი, მაგრამ არ არსებობს რიცხვი 7 რომელიც ბუნებით აბსტრაქტულია და სრულყოფილად მხოლოდ ჩვენს წარმოდგენაში არსებობს.

პირველი წარმოდგენების ჩამოყალიბებისას ფუნქციის შესახებ აუცილებლად უნდა მოვიშველიოთ შემდეგი ტიპის, ერთი შეხედვით მარტივი მაგრამ მეტად მნიშვნელოვანი,



დიაგრამა. ვერავინ იტყვის, რომ ამ დიაგრამას რთული ფორმა აქვს, მაშინ როცა არ არსებობს არც ერთი საწყისი ცნება ფუნქციებთან დაკავშირებით, (როგორიცაა ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე, ანასახი, წინარესახე, შექცეული ფუნქცია და ა.შ.) რომელიც არ გამოიხატოს და არ აიხსნას ამგვარი დიაგრამის საშუალებით. უფრო მეტიც, მოგვიანებით, როდესაც გაცილებით უფრო რთული ფუნქციების სწავლა მოგვიწევს და მათი გამოსახვის ფორმაც სრულიად განსხვავებული იქნება, არსებული ვითარების ამ მარტივი ისრების

ენაზე თარგმნა ჩვენს წარმოსახვაში და ამგვარ დიაგრამებთან დაკავშირება, დაგვეხმარება ფუნქციებთან დაკავშირებული ნებისმიერი პრობლემის ნათლად წარმოსახვაში.

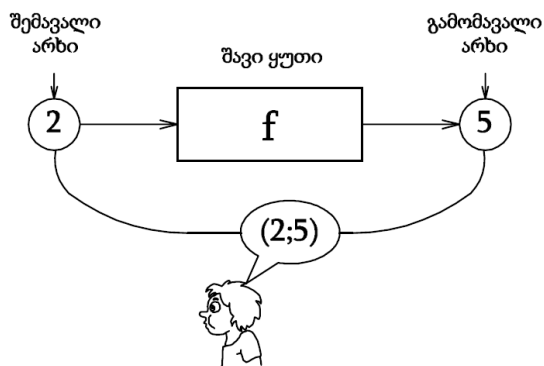
იმთავითვე მივაქციოთ ყურადღება, რა უნდა გამოიხატოს ამ დიაგრამაზე აუცილებლად და რისი გამოხატვის თავისუფლება გვაქვს დატოვებული. აუცილებლად უნდა ავიღოთ ორი სიმრავლე (ორი გროვა), მაგრამ რას დავარქმევთ მათ (ჩვენს შემთხვევაში ჰქვიათ A და B) ან რა წერტილებისაგან (სიმრავლის ელემენტები შეგვიძლია მოვიხსენიოთ როგორც წერტილები. ცხადია აქ არ იგულისხმება გეომეტრიული წერტილები) იქნებიან ისინი შემდგარნი სულერთია, ანუ -1, 2, 3 და ა.შ. ან 0, 4, 5 და ა.შ. რიცხვების მაგივად შეგვეძლო აგველო სხვა რიცხვები ან სრულიად სხვა ელემენტები (მაგალითად a, b, c , და ა.შ.). ისრების აუცილებლად უნდა ჰქონდეთ გეზი ერთიდაიმავე მხარეს ერთი სიმრავლის ელემენტებიდან მეორე სიმრავლის ელემენტებისკენ (ანუ, არ შეიძლება ზოგი ისარი მიმართული იყოს A-დან B-სკენ, ხოლო ზოგი B-დან A-სკენ). პირველი სიმრავლის ყველა წერტილიდან უნდა გამოდიოდეს აუცილებლად ერთადერთი ისარი, მაშინ როცა მეორე სიმრავლის წერტილებში შეიძლება შედიოდეს ერთზე მეტი ისარი ან არც ერთი მათგანი (როგორც მაგალითად 7-ში შედის ორი ისარი, ხოლო 10-ში არცერთი). ვგულისხმობთ, როგორც ეს შესავალში აღვნიშნეთ, რომ მკითხველს აქვს ფუნქციების შესახებ იმდენი წინასწარი ცოდნა, რათა მიხვდეს ამ მოთხოვნების მიზეზს (წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს მიზეზები მოგვიანებით გაირკვევა). ჩვენ უფრო სხვა კუთხით გავაშუქებთ ამ დიაგრამას და შევეცდებით ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს: რა შინაარსს ვდებთ ამ დიაგრამაში? სად არის აქ ფუნქცია? როგორც ვხედავთ ნახაზის ზედა შუა ადგილში გამოსახულია ლათინური ასო f , რასაც როგორც წესი ვხმარობთ ფუნქციის აღსანიშნად მისი ლათინური სახელწოდების (function) გამო, მაგრამ ნახატზე რა არის აღნიშნული ამ f -ით, ისრები? არა, f მთელი სურათის “სათაურადაა” გამოყენებული. ყველაფერი ერთად აღებული, რაც

ამ დიაგრამაზე გამოსახული, და მთლიანობაში გააზრებული წარმოდგენს ფუნქციას. ვგულისხმობთ, რომ ფუნქცია ამ დიაგრამის შინაარსშია და მის აღმოსაჩენად არსში ლოგიკური ჩაწვდომაა საჭირო. ამ მიზნით საჭიროა სრულყოფილად გავერკვეთ დიაგრამაზე გამოსახული ისრების დანიშნულებაში. მოდით ჯერ ასე ვთქვათ: “ეს ისრები მიგვანიშნებენ, რომ -1 გადავიდა 0-ში, 2 -- 5-ში, 3 -- 0-ში, და ა.შ.” მაგრამ რას ნიშნავს “გადავიდა”. სტატიკურ დიაგრამაზე მოძრაობები ვერ შესრულდება. ეს მოძრაობები გონების თვალთ ლოგიკურად უნდა წარმოვიდგინოთ და ეს დიაგრამაც სიმბოლურად სწორედ ამგვარ “გადასვლებს” გამოსახავს. ყოველი რიცხვი A სიმრავლიდან ისრების საშუალებით პოულობს თავის მეწყვილეს B სიმრავლეში. საჭიროა გავერკვეთ ამ პროცესში რა არის მთავარი და რა შეგვიძლია დავტოვოთ ყურადღების მიღმა. მთავარია, რომ დიაგრამაზე გამოსახული ფუნქცია, მაგალითად, -1-ს უკავშირებს 0-ს (“გადაჰყავს”, “გარდაქმნის”, “ლოგიკურად უკავშირებს”, “აწყვილებს”, განხილულ შემთხვევაში ყველა ეს სიტყვები სინონიმებია), რახან -1-იდან გამოსული ისარი შედის 0-ში. რატომ ან რა მიზეზით შევიყვანეთ -1-დან გამოსული ისარი მანდამაინც 0-ში, ფუნქციის მათემატიკური განსაზღვრისას არ გვაინტერესებს (სწორედ ამ მიზეზის ქვეცნობიერი ძიების გამო ხდება ფუნქციის ცნება გაუგებარი დამწყებთათვის). მაშასადამე, სტატიის დასაწყისში ნახსენებ განსაზღვრებაში, რომ ფუნქცია ეს არის წესი, რომლითაც A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი, არ იგულისხმება რომ ფუნქცია არის თვითონ წესი, ამ სიტყვის ტრადიციული გაგებით (ეს არის გავრცელებული შეცდომა). აქ იგულისხმება, რომ თავად ფუნქცია, მის მიერ მოწოდებული “ინსტრუქციით” თუ A და B სიმრავლის რომელი ელემენტები უკავშირდებიან ერთმანეთს (რაოდენ უცნაურადაც არ უნდა გამოიყურებოდეს ეს ინსტრუქცია. მაგალითად, განხილულ შემთხვევაში ეს “ინსტრუქცია” წარმოდგება ნახ. 1-ზე გამოსახული დიაგრამის სახით) გვაძლევს წესს. ანუ როცა ვამბობთ, რომ განვიხილოთ ფუნქცია, რომელიც “ყოველ რიცხვს უთანადებს გაორმაგებულ ამ რიცხვს” ($y = 2x$) ჩვენ არ ვგულისხმობთ, რომ ფუნქცია არის ამგვარად ჩამოყალიბებული წესი (ან შესაბამისი ფორმულა). ჩვენ ვგულისხმობთ რომ ფუნქცია ეს არის ის კავშირები, რომლებიც მყარდება რიცხვებს შორის ზემოხსენებული წესით (მაგალითად, 4 წყვილდება 8-სთან, 5 – 10-თან, და ა.შ.) უფრო მეტიც, ფუნქციის მოცემა ნიშნავს ყველა ერთმანეთთან დაკავშირებული ელემენტის ცოდნას. ანუ ნახ. 1-ზე მოცემული დიაგრამით გამოხატული ფუნქცია იმავე წარმატებით (ვგულისხმობთ ფუნქციის შესახებ ინფორმაციის სრულყოფილი შენარჩუნებით) შეგვეძლო ჩაგვეწერა როგორც $\{(-1; 0), (2; 5), (3; 0), (9; 4), (11; 7)\}$ (თუმცა ასეთი ჩაწერა ნაკლებად თვალსაჩინო იქნებოდა დამწყებთათვის). ამგვარად ჩაწერის შესაძლებლობებს ჩვენ მომავალშიც დავუბრუნდებით, როცა კიდევ უფრო დავაზუსტებთ ფუნქციის ცნებას. ეხლა შემოვიტანოთ ფუნქციების შესწავლასთან დაკავშირებული ყველაზე მნიშვნელოვანი აღნიშვნა, რითაც ზუსტ მათემატიკურ ფორმას მივცემთ ზემოხსენებულ “ისრებსა” და “დაწყვილებებს”. ის ფაქტი, რომ f ფუნქციას 2 გადაჰყავს 5-ში (იხ. ნახ. 1) იწერება ამგვარად:

$$f(2) = 5. \quad (1)$$

ამ დროს ვამბობთ, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობა 2-ში არის 5. ამ შემთხვევაში სიტყვა “მნიშვნელობა” მათემატიკურ ტერმინს წარმოადგენს და არ იხმარება მისი

ლიტერატურული გაგებით, თუმცა ინტუიციურად ცხადია რაღა მანდამინც ეს სიტყვა შეირჩა ამ ტერმინის დასაფიქსირებლად. ცხადია ანალოგიურად $f(3) = 0$ ანუ f ფუნქციის მნიშვნელობა 3-ში არის 0, $f(11) = 7$ და ა.შ. შემოდებული აღნიშვნის შინაარსში ჩაწვდომა ფაქტიურად ნიშნავს ფუნქციის არსის სწორად გაგებას. როგორც წესი, მოსწავლეებს უცნაურად ეჩვენებათ ეს აღნიშვნა. მათ უკვირთ რატომ დაიწერა 2-სა და 5-ს შორის ტოლობა. ცხადია 2 არ უდრის 5-ს. (1) ტოლობა ასე უნდა გავიგოთ, რომ f ფუნქციის საშუალებით 2 “გარდაიქმნა” 5-ად. თანამედროვე კომპიუტერულ ეპოქაში არ უნდა შეგვეშინდეს ამ სიტყვის ხმარების, რადგან კომპიუტერთან ურთიერთობის პირველივე უნარ-ჩვევების გამომუშავებისას მოზარდებს უხდებათ ამგვარი “გარდაქმნების” ჩატარება კომპიუტერის ეკრანზე კურსორის სათანადო ადგილას მიყვანით და სათანადო ღილაკის დაწკაპუნებით. და კიდევ ერთხელ გავიმეოროთ, რომ ის რაღაც f გარდაქმნის 2-ს გამოცხადდა f -ის მნიშვნელობად 2-ში, და სწორედ ეს მნიშვნელობა უდრის 5-ს და არა 2 უდრის 5-ს. სწორედაც თანამედროვე კომპიუტერულ ეპოქაში მეტაფორულად ფუნქციას წარმოიდგენენ როგორც “შავ ყუთს”, რომელსაც გააჩნია შემავალი არხი (input) და გამომავალი არხი (output). როდესაც ნახ. 1-ზე გამოსატული A სიმრავლის ელემენტები მიეწოდება ამ ყუთს შემავალი არხიდან, გამომავალ არხზე ვღებულობთ B სიმრავლის იმ ელემენტებს, რომლებთანაც ისინი არიან ისრით შეერთებულნი, ანუ გონების თვალთ დაწყვილებულნი. ამგვარ



“მოწყობილობას” შეგვიძლია თამამად ვუწოდოთ ფუნქცია, რათა ეს აბსტრაქტული მათემატიკური ცნება სიცოცხლის უნარიან და “ხელშესახებ” ობიექტად ვაქციოთ მოსწავლეთათვის, რომელთაც უამრავი ფუნქციებთან დაკავშირებული სავარჯიშო შეგვიძლია შევთავაზოთ ამ ტერმინებში. მაგალითად ამგვარი: “ნახ. 2-ზე გამოსახულ შავ ყუთში (იგი წარმოადგენს ნახ. 1-ზე მოცემული ფუნქციის შესაბამის მოწყობილობას) შემავალი არხიდან

მივაწოდეთ -1. რა რიცხვი მოგვეწოდება გამომავალი არხიდან?” ან “რა რიცხვი უნდა მივაწოდოთ შემავალი არხიდან რათა გამომავალ არხზე მივიღოთ 5?” ან “რამდენი სხვადასხვა რიცხვი შეგვიძლია მივაწოდოთ შემავალ არხზე, რათა გამომავალ არხზე მივიღოთ 7?” ან “შეგვიძლია მივაწოდოთ ისეთი რიცხვი, რომ გამოვიღდეს 10?” და ა.შ. ამ ერთი შეხედვით სათამაშო კითხვებზე პასუხის მოფიქრებისას ფუნქციის ცნების აღსაქმელად საჭირო მრავალი უნარ-ჩვევა ყალიბდება მოზარდებში. ტერმინის “შავი ყუთი” ხმარება ნახ. 2-ზე გამოსატული მოწყობილობის აღსანიშნად, ხაზს უსვამს იმ ფაქტს, რომ ჩვენ არ გვაინტერესებს თუ რისგან შედგება “ყუთი”, რა მექანიზმებით ახერხებს იგი თავის დანიშნულების შესრულებას. ჩვენთვის მთავარია მხოლოდ იმის

ცოდნა თუ რა “რეაქციას” იძლევა იგი თითოეული “გადიზიანებისას”. თუმცა ხშირ შემთხვაში ეს ცოდნა სწორედ “შინაგანი სტრუქტურის” აღწერით შეიძლება იყოს გადმოცემული, როგორც მაგალითად ეს ნახ. 3-ზე მოცემულ სიტუაციაშია გაკეთებული. ეხლა განვიხილოთ განსხვავებული ფორმით წარმოდგენილი ფუნქცია

$$y = 2x, \quad (2)$$

რომელიც ჩვენ ზემოთ უკვე ვახსენეთ. ფუნქციის შესახებ შექმნილი წარმოდგენები, რაც ნახ. 1-ზე გამოსახულმა დიაგრამამ და თანდართულმა მსჯელობებმა შეგვიქმნა, თითქოს არსად ჩანს ტოლობა (2)-ში, მაგრამ ეს მხოლოდ ერთი შეხედვით. თუ უფრო ღრმად ჩაუკვირდებით საკითხს ტოლობა (2) სწორედაც რომ შეიძლება “გადაითარგმნოს” ნახ. 1-ზე გამოსახული ისრების ენაზე. ალბათ ნათელია როგორაც. A და B სიმრავლეების როლში უნდა ავიღოთ ყველა შესაძლო რიცხვების სიმრავლე (სკოლის მოსწავლეთათვის, მაღალ კლასებში გადასვლასთან ერთად, ეს სიმრავლე თანდათან ფართოვდება). გასაგებია, რომ ამ სიმრავლეს ისე თვალნათლივ ვეძარ დავხატავთ, როგორც ეს ნახ. 1-ზე გამოსახული სასრული სიმრავლეებისთვის გავაკეთეთ, მაგრამ ამით ფუნქციის ძირითადი იდეა არ დაზარალდება. მთავარია წარმოვიდგინოთ, რომ თითოეული რიცხვიდან გამოდის ისარი და შედის გაორმაგებულ ამ რიცხვში. მაგალითად: $2 \rightarrow 4$; $5 \rightarrow 10$; $-3 \rightarrow -6$ და ა.შ. ცხადია აქ ტოლობა (2)-ით გაჩენილ უსასრულო რაოდენობა ისართა შორის, მხოლოდ რამოდენიმე ამოვარჩიეთ სანიმუშოდ და ყველა მათგანს ვერც ჩამოვწერთ, მაგრამ თავად ფუნქცია, როგორც ასეთი, ყველა ამ ისრების ერთობლიობას წარმოადგენს. როგორც ადრეც გავაკეთეთ, ისრების სახით გამოხატული კავშირი შეგვეძლო წყვილებითაც ჩაგვეწერა: $\{(2; 4), (5; 10), (-3; -6) \dots\}$ ოღონდ კიდევ ერთხელ გავიმეოროთ, რომ (2) ტოლობის ფუნქციად წარმოდგენა ყველა ამგვარი წყვილების წარმოდგენას ნიშნავს. თუ უკვე შემოღებულ აღნიშვნებსაც გამოვიყენებთ, ეს ტოლობა შეგვიძლია ამგვარი ფორმითაც გადავწეროთ

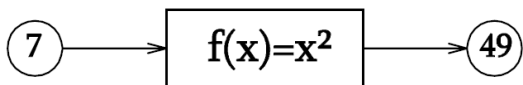
$$f(x) = 2x,$$

რომელშიც კიდევ უფრო ნათლად გამოჩნდება მისი როგორც ფუნქციის ბუნება. ფუნქციის (2) ფორმულის სახით ჩაწერის დროს, როგორც წესი x -ს დამოუკიდებელ ცვლადს ან არგუმენტს უწოდებენ, ხოლო y -ს დამოკიდებულ ცვლადს.

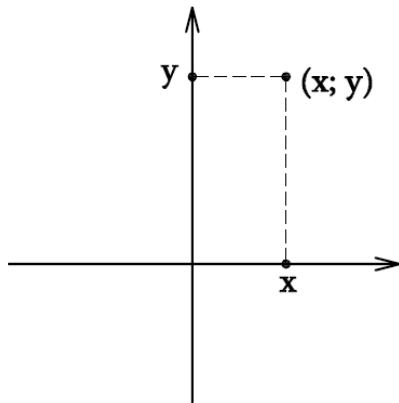
ვფიქრობთ, თანდათან იკვეთება საერთო ხაზი ნახ. 1-ზე გამოხატულ ფუნქციასა და ტოლობა (2)-ით მოცემულ ფუნქციას შორის (როგორც ვხედავთ ფორმით ისინი საკმაოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისგან). ჩვენ გავაგრძელებთ ამ საერთო ხაზის აღმოჩენას ფუნქციის წარმოდგენის სხვა ხერხებშიც, რითაც მოვემზადებით ფუნქციის ცნების დაზუსტებული განსაზღვრებისთვის.

ფუნქციის გრაფიკი.

ეხლა გადავიდეთ გრაფიკით მოცემული ფუნქციების განხილვაზე. მართალია ამ ფორმით მხოლოდ რიცხვითი ფუნქციები (რიცხვებს შორის დამოკიდებულებები) შეიძლება გამოისახოს, მაგრამ სწორედ ამგვარი ფუნქციები თამაშობენ უმნიშვნელოვანეს როლს მათემატიკაში.



გრაფიკების განხილვამდე დეკარტის კოორდინატთა სისტემა უნდა გავიხსენოთ.*) ვგულისხმობთ, რომ მოსწავლეებმა უკვე უნდა იცოდნენ და მათ უნდა შეეძლოთ

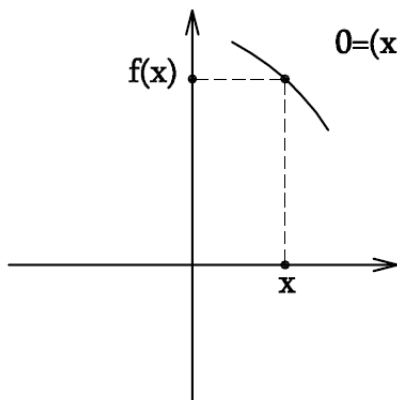


სიბრტყეზე შემოტანილ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში თითოეული წერტილისთვის მისი პირველი და მეორე კოორდინატების პოვნა, და პირიქით ყოველი დალაგებულ რიცხვთა წყვილისთვის სიბრტყეზე შესაბამისი წერტილის აგება. ეს ცოდნა თანამედროვე მათემატიკის ფუნდამენტს, “ანბანს” წარმოადგენს და ამ ერთი შეხედვით მარტივი დავალების შესრულება მოსწავლეებს წერა-კითხვასავით გამართულად უნდა შეეძლოთ. ამ მიზნის მისაღწევად მათემატიკის მასწავლებელს დრო და ენერგია არ უნდა დაენანოს, რათა მოსწავლეებს შესაფერისი დოზით შესთავაზოს სათანადო აქტივობები და სავარჯიშოები. (დაწყებითი სწავლების

საფეხურებზე კოორდინატთა სისტემის ათვისებისაკენ მიმავალი გზა რიცხვითი ღერძის შესწავლაზე გადის და მასაც სათანადო ყურადღება უნდა მიექცეს.) იმედს გამოვთქვამთ, რომ საბოლოოდ ისევე როგორც ყოველი, სწავლების ადეკვატურ პირობებში ჩავარდნილი, მოზარდი ახერხებს წერა-კითხვის შესწავლას, ასევე ყველა მოსწავლემ უნდა შეძლოს მათემატიკური ცოდნის მიღების და გათავისების ამ ეტაპის წარმატებით დაძლევა. სასკოლო მათემატიკური პროგრამით გათვალისწინებული თითქმის ყველა საკითხი 7-12 კლასებში უშუალოდ ან ირიბად ეყრდნობა მოსწავლეთა მიერ კოორდინატთა სისტემაში სწორად ორიენტირების უნარს.

*) აღვნიშნოთ აქვე რომ ფრანგი ფილოსოფოსისა და მათემატიკოსის რენე დეკარტეს (1596-1650) მიერ კოორდინატთა სისტემის შემოტანა იყო მათემატიკის განვითარებაში გადადგმული უდიდესი ნაბიჯი, რითაც მოხდა მათემატიკის “ვიზუალიზაცია”, ალგებრისა და გეომეტრიის შერწყმა, და ა.შ.

თუკი ვიგულისხმებთ, რომ მოსწავლეს ზემოხსენებულ დონეზე ათვისებული აქვს



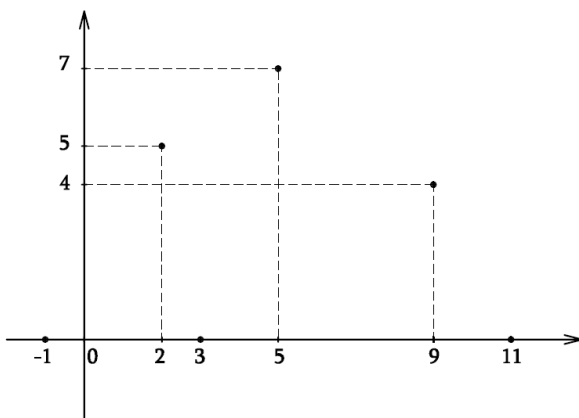
$O=(x; y)$

საკოორდინატო სიბრტყე და გააზრებული აქვს წერტილებსა და კოორდინატებს შორის კავშირი, ერთი ნაბიჯიღაა დარჩენილი ნახაზზე გამოსახულ გრაფიკში “ამოვიცნოთ” ფუნქცია, ანუ შევამჩნიოთ ის დამოკიდებულება რიცხვებს შორის რაც ნახ. 1-ზე ისრების საშუალებით იყო გამოსახული. მართლაც, აქ კეთდება ელემენტარული მაგრამ მნიშვნელოვანი შეთანხმება. საკოორდინატო სიბრტყეზე აღებული წერტილი ბუნებრივად მიგვანიშნებს, რომ მისი პირველი კოორდინატი დაუკავშირდა მეორე კოორდინატს, ანუ დაწყვილდა მეორე კოორდინატთან. აქედან გამომდინარე,

საკოორდინატო სიბრტყის $O = (x; y)$ წერტილი წარმოადგენს f ფუნქციის გრაფიკის წერტილს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა f ფუნქცია x -ს უთანადებს y -ს, რაც როგორც გვახსოვს ფორმულის სახით ამგვარად იწერება, $y = f(x)$ (იხ. ნახ. 5). უფრო მეტიც, როდესაც ფუნქცია არის წარმოდგენილი გრაფიკის სახით, ყოველ მოსწავლეს უნდა შეეძლოს მოცემული x წერტილისათვის იპოვოს შესაბამისი $f(x)$ მნიშვნელობა. ალბათ

ძნელი არ არის, უკვე ახსნილის მიხედვით, მივხვდეთ როგორ უნდა გაკეთდეს ეს, მაგრამ ჩვენ საგანგებოდ ჩამოვყალიბებთ ზუსტ წესს: „მოცემული x წერტილისთვის $f(x)$ -ის საპოვნელად ჯერ x წერტილზე უნდა ავდმართოთ OX ღერძის მართობი (გავავლოთ OY ღერძის პარალელური წრფე) და ვიპოვოთ მისი თანაკვეთა გრაფიკთან (თუ იგი გრაფიკს არ გადაკვეთს, მაშინ ფუნქცია x წერტილში განსაზღვრული არ არის, ანუ $f(x)$ არ არსებობს). შემდეგ ვიპოვოთ ამ გადაკვეთის წერტილის მეორე კოორდინატი (ანუ დავაგეგმილოთ ეს წერტილი OY ღერძზე), რომელიც იქნება $f(x)$ “. ეს წესი თითქოს მარტივია და ახალს არაფერს ამბობს, მაგრამ მისი არა მარტო გააზრება, არამედ ბუნებრივად გათავისებაც მეტად სასარგებლო იქნება მკითხველთათვის.

თავად გრაფიკი წარმოადგენს ფუნქციის მიერ რიცხვებს შორის დამყარებული თითოეული კავშირის აღმნიშვნელი შესაბამისი წერტილების ერთობლიობას. მაგალითისთვის, ნახ. 1-ზე გამოხატული ფუნქციის გრაფიკს ამგვარი სახე ექნება (იხ. ნახ. 6). ამ გრაფიკს ერთი შეხედვით უცნაური სახე აქვს, რადგან მსგავს სურათებს თითქმის



არასდროს ვაწყდებით სახელმძღვანელოებში, მაგრამ თუ კარგად დავაკვირდებით იგი ზუსტად იმავე კავშირებს გამოსახავს რასაც ისრები აკეთებენ ნახ. 1-ზე. მაშასადამე ამ ორი ნახაზის (ნახ. 1 და ნახ. 6) მათემატიკური შინაარსი ერთიდაიგივეა. როგორც წესი, გრაფიკებს ჩვენ რაიმე უწყვეტი წირების სახით წარმოვიდგენთ ხოლმე, რაც თავისთავად მიგვანიშნებს, რომ რიცხვთა უსასრულო რაოდენობა გვაქვს ერთმანეთთან დაკავშირებული. ცხადია ამ დროს მოცემული კავშირების გამოხატვა

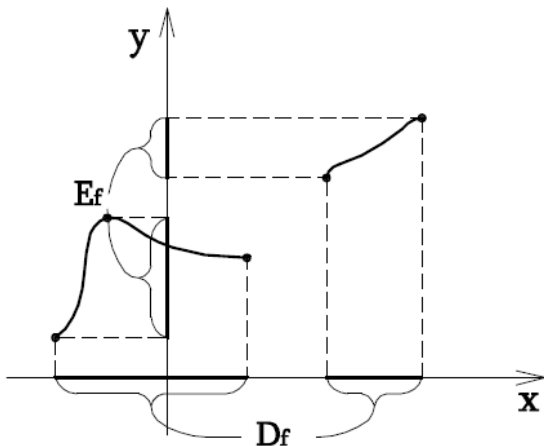
ისრების საშუალებით შეუძლებელია და გრაფიკი ფუნქციის მოცემის გაცილებით მოსახერხებელ ფორმას წარმოადგენს. როგორ ავაგოთ რაიმე ფორმულით მოცემული ფუნქციის გრაფიკი, მხოლოდ და მხოლოდ ტექნიკურ სიძნელეებთანაა დაკავშირებული. ჩვენ ჯერჯერობით ფუნქციის შინაარსში ჩაწვდომას და მისი გამოხატვის მრავალფეროვნების გაგებას ვცდილობთ. იმედია მკითხველისთვის ახლა უფრო ნათელი გახდა ფუნქციის ცნება, თუმცა ჩვენ ჯერ კიდევ არ ჩამოგვიყალიბებია ფუნქციის ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრა (ამას მოგვიანებით გავაკეთებთ). არ გაგვიმახვილებია ყურადღება იმ ფაქტზედაც (თუმცა გაკვრით უკვე ვახსენეთ), რომ კატეგორიულად იკრძალება f ფუნქციით ერთ ელემენტს ერთზე მეტი ელემენტი შეესაბამებოდეს, ანუ ნახ.1-ზე რომელიმე წერტილიდან ორი ან მეტი ისარი გამოდიოდეს. ეს სხვანაირად იმასაც ნიშნავს, რომ $f(x)$ ყოველთვის ცალსახად განსაზღვრული უნდა იყოს თავისი მნიშვნელობით, რაც გრაფიკების ენაზე იმას ნიშნავს, რომ ყოველი OY ღერძის პარალელური წრფე გრაფიკს კვეთს არაუმეტეს ერთი წერტილისა. არ გვითქვამს ისიც, რომ ხშირად ფუნქციებს ასახვას უწოდებენ, განსაკუთრებით მაშინ როცა მათ გეომეტრიაში განვიხილავთ, როგორც სიბრტყის წერტილებს შორის კავშირს

(პარალელური გადატანა, ღერძული სიმეტრია, მობრუნება და ა.შ. წარმოადგენენ ამგვარი ასახვების ანუ ფუნქციების ნიმუშებს. იხ. ამავე წიგნში მოთავსებული სტატია „ვექტორები და სიბრტყის გარდაქმნები“).

ფუნქციებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგია. ჩვენ ეხლა გადავალთ ფუნქციებთან დაკავშირებული ტერმინოლოგიის დაზუსტებაზე და მოცემული ფუნქციიდან სხვადასხვა ფუნქციების აგებაზე, რითაც კიდევ უფრო დავხვეწთ ჩვენს წარმოდგენას ამ ცნებაზე. საილუსტრაციოდ ხშირად ისევ და ისევ ნახ.1-ზე გამოხატულ მარტივ ფუნქციას გამოვიყენებთ.

ყველა ფუნქციას გააჩნია განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე. ნახ.1-ზე მოცემული ფუნქციისთვის განსაზღვრის არე არის $A = \{-1, 2, 3, 5, 9, 11\}$, ანუ ეს არის იმ წერტილების სიმრავლე საიდანაც ისრები უნდა გამოდიოდნენ, ხოლო მნიშვნელობათა არე- $B = \{0, 4, 5, 7, 10\}$, ანუ იმ წერტილების სიმრავლე სადაც ისრები უნდა შედიოდნენ. ეს უკანასკნელი ტერმინი არ არის საყოველთაოდ მიღებული. ხშირად მის ნაცვლად ხმარობენ *მნიშვნელობათა სიმრავლეს*, მაგრამ ჩვენ განვასხვავებთ ამ ორ ტერმინს. მნიშვნელობათა სიმრავლედ უფრო სწორი იქნება მივიჩნიოდ $\{0, 4, 5, 7\}$. ანუ 10 შედის მნიშვნელობათა არეში, მაგრამ არ შედის მნიშვნელობათა სიმრავლეში (ცხადია რა მიზეზის გამოც). ეს განსხვავება არ თამაშობს არსებით როლს ფუნქციების შესწავლისას. აღსანიშნავია ის გარემოებაც, რომ განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა არე ან სიმრავლე შეიძლება იყოს ნებისმიერი ორი სიმრავლე, არა მანდამაინც რიცხვითი სიმრავლე. ხშირად მათ აღნიშნავენ, შესაბამისად, D_f -ით, R_f -ით, და E_f -ით. ბუნებრივია ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მკითხველს უკვე აქვს საკმარისი წარმოდგენა სიმრავლეების შესახებ, თუმცა ჩვენც კიდევ ერთხელ ავხსნით ამ ცნების შინაარსს გარკვეული მოსამზადებელი სამუშაოების ჩატარების შემდეგ ფუნქციის ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრის წინ. თუ გავიხსენებთ სიმრავლის მოცემის ხერხებს, გარდა ელემენტთა უბრალო ჩამონათვალისა, მაგალითად $A = \{-1, 2, 3, 5, 9, 10\}$ ან $B = \{0, 4, 5, 7, 10\}$, ჩვენ სიმრავლეებს ხშირად ვწერთ $\{x: P(x)\} = \{x \in U: P(x)\}$ სახით, რაც იმ x ელემენტების ერთობლიობას ნიშნავს (U სიმრავლიდან) რომელთაც P თვისება აქვთ, მაშინ მოცემული f ფუნქციისათვის შეგვიძლია ასე ჩავწეროთ $D_f = \{x: f(x) \text{ არსებობს ანუ განსაზღვრულია}\}$ და $E_f = \{y: \text{არსებობს } x \in D_f \text{ რომლისთვისაც } f(x) = y\}$. მივაქციოთ ყურადღება, რომ ამ გზით ჩვენ ჩავწერეთ f -ის მნიშვნელობათა სიმრავლე E_f და არა მნიშვნელობათა არე R_f . ამ უკანასკნელის ჩაწერა ანალოგიური გზით გავგიჟირდებოდა. წინასწარ დასახელებული ნებისმიერი B , რომელიც მოიცავს E_f -ს, $B \supset E_f$, შეიძლება იყოს f -ის მნიშვნელობათა არე. თუ ფუნქციის განსაზღვრის არე არ არის მკაფიოდ ჩამოყალიბებული, მაშინ იგი ჩანაწერის კონტექსტიდან იქნება გასაგები. მაგალითად თუ ფუნქცია მხოლოდ ფორმულის სახით არის ჩაწერილი, ვთქვათ $f(x) = \sqrt{x-2}$, ყოველთვის იგულისხმება, რომ განსაზღვრის არე არის ყველა იმ რიცხვების სიმრავლე რომელთათვისაც გამოსახულებას აზრი აქვს, ანუ ამ შემთხვევაში $D_f = [2; +\infty)$. მნიშვნელობათა არეც როგორც წესი კონტექსტიდანაა ცნობილი, ხოლო მნიშვნელობათა სიმრავლე ხშირად ჩვენ თვითონ უნდა ვიპოვოთ.

განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე შეგვიძლია ფუნქციის მეტაფორულად „შავი ყუთის“ სახით წარმოდგენითაც გავიაზროთ (იხ. ნახ.2) კერძოდ, ყველა იმ ელემენტთა (დასაშვებ მნიშვნელობათა) ერთობლიობას, რომელთა შემავალ არხზე მიწოდებითაც მიიღება რაიმე გამომავალი პასუხი, ჰქვია განსაზღვრის არე. ხოლო ყველა შესაძლო გამომავალი პასუხების შეგროვებით მივიღებთ მნიშვნელობათა სიმრავლეს. ამავე ხერხით შეგვიძლია ავხსნათ ისეთი მნიშვნელოვანი ცნებები, როგორიცაა ანასახი და წინარესახე. თუ A_0 არის f ფუნქციის განსაზღვრის არის ქვესიმრავლე, $A_0 \subset A$, მაშინ A_0 -ის ანასახი f ფუნქციით (აღინიშნება $f(A_0)$ -ით) ეწოდება შემავალ არხზე A_0 -ის ყველა ელემენტის შეყვანის შემდგომ გამომავალი პასუხების შეგროვებით მიღებულ სიმრავლეს, ანუ $f(A_0) = \{f(x) : x \in A_0\}$. მაგალითად, ნახ. 1-ზე გამოსახული ფუნქციისთვის $f(\{-1, 5, 11\}) = \{0, 7\}$. ცხადია ანასახი ყოველთვის არის მნიშვნელობათა არის ქვესიმრავლე, ამასთანავე $f(A) = E_f$. თუ B_0 არის f ფუნქციის მნიშვნელობათა არის ქვესიმრავლე, $B_0 \subset B$, მაშინ B_0 -ის წინარესახე f ფუნქციით (აღინიშნება $f^{-1}(B_0)$ -ით) ეწოდება ყველა იმ ელემენტის სიმრავლეს, რომელთა შემავალ



არხში შეყვანით გამომავალი პასუხი მოხვდება B_0 -ში, ანუ $f^{-1}(B_0) = \{x : f(x) \in B_0\}$. მაგალითად, ნახ. 1-ზე გამოსახული ფუნქციისთვის $f^{-1}(\{0, 7\}) = \{-1, 3, 5, 11\}$. ცხადია წინარესახე ყოველთვის არის განსაზღვრის არის ქვესიმრავლე, ამასთანავე $f^{-1}(B) = A = D_f$. მოსწავლეებს დაავალოთ იგივე ცნებები (ანასახი და წინარესახე) გამოთქვან ისრების ენაზე. თუ f ფუნქცია გრაფიკით არის მოცემული, მაშინ D_f იქნება გრაფიკის წერტილების OX ღერძზე დაგეგმილებით მიღებული წერტილების სიმრავლე, ხოლო E_f იქნება იმავე წერტილების OY ღერძზე დაგეგმილებით მიღებული წერტილების

სიმრავლე. მოსწავლეთათვის კარგი სავარჯიშო იქნება აგრეთვე OX ღერძზე აღებული რაიმე სიმრავლისთვის მისი ანასახის მოძებნა OY ღერძზე, ან პირიქით, OY ღერძზე აღებული რაიმე სიმრავლის წინარესახის მოძებნა OX ღერძზე.

განსაზღვრის არისა და მნიშვნელობათა სიმრავლის ცნებების დაზუსტების შემდეგ კიდევ ერთხელ დაუბრუნდეთ ფუნქციის ცნებას და მისი ამგვარი განსაზღვრება მოვიტანოთ: „ვიტყვი, რომ მოცემულია f ფუნქცია A და B სიმრავლეებს შორის და ამ ფაქტს ასე ჩაწერთ $f: A \rightarrow B$ (იგულისხმება, რომ A არის განსაზღვრის არე, ხოლო B - მნიშვნელობათა არე) თუკი A სიმრავლის ყოველ ელემენტს შეესაბამება B სიმრავლის ერთადერთი ელემენტი“. ეს განსაზღვრა სათანადო ახსნა განმარტებებთან ერთად მოსწავლისთვის შეიძლება მრავალსიმთქმელი აღმოჩნდეს და შესაფერისი სავარჯიშოების დამოუკიდებლად შესრულების შემდეგ მას შეუძლია სწორად ჩაწვდეს ფუნქციის არსს, მაგრამ იგი ვერ გამოდგება ფუნქციის ზუსტ მათემატიკურ განსაზღვრად, რადგან აქ გამოვიყენეთ ცნება „შესაბამისობა“, რომლის ზუსტი განსაზღვრაც ჯერ ისევ

არ გვიხსენებია, როგორც ფუნქციისა. მაშასადამე ზემოხსენებული განსაზღვრა ლოგიკური თვალსაზრისით ტავტოლოგიას წარმოადგენს და ადრე ხსენებულ “სინონიმთა” სიას: გადაჰყავს, გარდაქმნის, ლოგიკურად უკავშირებს, აწყვილებს, (ჩვენ არ დავზარდებით მათ გამეორებას) კიდევ ერთი სიტყვაა “შესაბამისობაში მოჰყავს” მიემატა. მიუხედავად ამისა, ზემოთ მოტანილი განსაზღვრა სწორად წარმოგვიდგენს ფუნქციის თვისებებს და მის შინაარსს, ამიტომ ჩვენ სავსებით შეგვიძლია ვისარგებლოთ მით და ჩვენი შემდგომი მსჯელობებიც ამ განსაზღვრებას დავაყრდნობთ. ვფიქრობთ, წინასწარ ჩატარებული ვრცელი მსჯელობები აღმოფხვრის ამ განსაზღვრებასთან დაკავშირებულ ყოველგვარ ბუნდოვან ადგილს და ორაზროვნებას. მოგვიანებით ლოგიკური სიმკაცრის მიზნით ფუნქციის მათემატიკურად ზუსტ განსაზღვრასაც შემოგთავაზებთ.

ეხლა დავსვათ ასეთი კითხვა: “როდის არის ორი ფუნქცია ტოლი ანუ ერთიდაიგივე? საზოგადოდ ტოლობის ცნება მათემატიკის შემეცნების უპირველეს იარაღს წარმოადგენს. ერთი შეხედვით თავისთავად ცხადია რას ნიშნავს ტოლობა და მას არავითარი განსაზღვრა არ სჭირდება, მაგრამ მათემატიკაში ხშირად ხდება, რომ ფორმით სრულიად განსხვავებულად წარმოდგენილ ობიექტებს ერთიდაიგივე შინაარსი აქვთ, რის გამოც მათ ტოლს უწოდებენ (ამგვარი სიტუაციის კლასიკური ნიმუშია წილადების ტოლობა $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$). ამიტომ ხშირად ისმის საკითხი შემოღებულ ობიექტებს შორის ტოლობის ცნების დაზუსტების. ფუნქციებს შორის ტოლობა იმგვარად უნდა განვსაზღვროთ, რომ ნახ. 1-ზე და ნახ. 6-ზე გამოსახული ფუნქციები ტოლი გამოვიდეს (მიუხედავად იმისა, რომ ისინი სრულიად განსხვავებულად გამოიყურებიან). კერძოდ „ორ f და g ფუნქციას ეწოდება ტოლი თუკი ამ ფუნქციებს ერთიდაიგივე განსაზღვრის არე აქვთ, $D_f = D_g$, და განსაზღვრის არის ყოველი x წერტილისათვის მისი შესაბამისი მნიშვნელობები f ფუნქციით და g ფუნქციით ერთიდაიგივეა, $f(x) = g(x)$ “. ბუნებრივია ფუნქციათა ტოლობის განსაზღვრა სწორედ ასეთი უნდა ყოფილიყო, მაგრამ მივაქციოთ ყურადღება რამოდენიმე არც თუ უმნიშვნელო დეტალს. f და g რომ ტოლი იყოს ისინი აუცილებლად ერთიდაიგივე სიმრავლეზე უნდა იყვნენ განსაზღვრულნი. მაგალითად, თუკი $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ და $g(x) = x + 2$ მაშინ f და g როგორც ფუნქციები ტოლი არ არიან, თუმცა მოსწავლე რომელიც მაგალითის გამოყვანისას დაწერს $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$ არავითარ შეცდომას არ დაუშვებს. საქმე უბრალოდ იმაშია, რომ თუმცა $f(x) = g(x)$ როცა $x \neq 2$ თავად 2 არ შედის f -ის განსაზღვრის არეში, $2 \notin D_f$, მაშინ როცა $2 \in D_g$. ე.ი. $D_f \neq D_g$ და ამიტომაც $f \neq g$. ჩვენი სიტყვებით ამ შემთხვევას შეგვიძლია ამგვარი კომენტარი გავუკეთოთ, რომ ფუნქციათა ტოლობა ნიშნავს აბსოლუტურად ერთიდაიგივე შესაბამისობების მოცემას, სრულიად პატარა განსხვავების გარეშე. მაგრამ მივაქციოთ ყურადღება, რომ ჩვენი განსაზღვრით ტოლ ფუნქციებს არ მოეთხოვებათ ერთიდაიგივე მნიშვნელობათა არე ჰქონდათ (ლაპარაკია მნიშვნელობათა არეზე. გასაგებია, რომ მნიშვნელობათა სიმრავლე ტოლ ფუნქციებს ავტომატურად ერთიდაიგივე გამოუვათ, ამიტომაც ეს ფაქტი ცალკე სპეციალურად ტოლობის განსაზღვრაში არ მოგვიხსენებია). ამით ფაქტიურად ფუნქციის მოცემისას ჩვენ არ ვაკონკრეტებთ მის მნიშვნელობათა არეს. ეს არ არის ცალსახად მიღებული თვალსაზრისი, მაგრამ იგი სრულ თანადობაშია ფუნქციის ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრიდან გამომდინარე პოზიციასთან.

ფუნქციათა ტოლობის და მათი განსაზღვრის არის გააზრებასთან მჭიდროდ არის დაკავშირებული ისეთი ცნებები როგორიცაა ფუნქციის *შეზღუდვა* და *განვრცობა*. ერთი შეხედვით ამ ცნებებში ახალი არაფერია და არც ღირს ხსენებად, მაგრამ მათი სწორი ცოდნა მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ზოგიერთი ფუნქციის წარმოდგენაში, კერძოდ შექცეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციების აგებაში. ვთქვათ მოცემული გვაქვს რაიმე ფუნქცია. თუ მის განსაზღვრის არიდან ამოვყრით რაიმე წერტილებს და დარჩენილ წერტილებში შევინარჩუნებთ ფუნქციის მნიშვნელობებს, მივიღებთ ამ ფუნქციის შეზღუდვას. თუკი პირიქით, განსაზღვრის არეს მივუერთებთ ახალ წერტილებს და მათაც შევუსაბამებთ რაიმე მნიშვნელობებს, მაშინ მივიღებთ მოცემული ფუნქციის განვრცობას. ფორმულების ენაზე ეს დამოკიდებულება ასე გამოიხატება. g ფუნქცია არის f ფუნქციის შეზღუდვა, თუკი $D_g \subset D_f$ და $g(x) = f(x)$ როცა $x \in D_g$. თუ g ფუნქცია არის f -ის შეზღუდვა, მაშინ f იქნება g -ს განვრცობა. ხშირად, როცა $A \subset D_f$, f -ის შეზღუდვას A -ზე აღვნიშნავთ $f|_A$ -თი. ე.ი $f|_A(x) = f(x)$ როცა $x \in A$ და სხვა შემთხვევაში იგი განსაზღვრული არ არის. უნდა შევძლოთ იმის დანახვაც, რომ ამ დროს A სიმრავლის ანასახი f ფუნქციით არის $f|_A$ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე.

ფუნქციის თემის დამუშავების ჩვენეული სტრატეგია იმაში მდგომარეობს, რომ მარტივად, ნახ. 1-ზე გამოსახული ისრების მეშვეობით, ავხსნათ ფუნქციებთან დაკავშირებული ძირითადი ცნებები: ინექცია, „ზე“ და „ში“ ასახვები, ურთიერთცალსახა ასახვა, შექცეული ფუნქცია, ფუნქციათა კომპოზიცია. პირველი სამი ცნება შეიძლება რამოდენიმე ფრაზით ჩამოყალიბდეს, თუმცა მკითხველმა კარგად უნდა გაიაზროს ეს ცნებები და სათანადო სავარჯიშოების შესრულებით განიმტკიცოს მათი ცოდნა. $f: A \rightarrow B$ ასახვა არის *ინექცია* თუკი B -ს არც ერთ წერტილში არ შედის ორი ან მეტი ისარი (ნახ. 1-ზე გამოსახული ფუნქცია არ არის ინექცია, რადგან მაგალითად 7-ში შედის ორი ისარი), ანუ $f(x_1) \neq f(x_2)$ როცა $x_1 \neq x_2$. (გრაფიკულად ეს ნიშნავს, რომ ყოველი Ox ღერძის პარალელური წრფე f -ის გრაფიკს კვეთს არაუმეტეს ერთი წერტილისა. რატომ?) ის არის „ზე“ ასახვა თუკი B -ს ყოველ წერტილში შედის ერთი მაინც ისარი (ნახ. 1-ზე არ გვაქვს „ზე“ ასახვა, რადგან 10-ში არ შედის ისარი), ანუ ნებისმიერი y -ისთვის B -დან არსებობს $x \in A$ -ს ისეთი რომ $f(x) = y$. წინააღმდეგ შემთხვევაში მას ჰქვია „ში“ ასახვა. თუ f არის ინექცია და „ზე“ ასახვა მას ჰქვია *ურთიერთცალსახა* ფუნქცია ან *ბიექცია*. ცხადია, თუ A და B სასრული სიმრავლეებია და მათ შორის არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა, მაშინ ელემენტების რაოდენობა A და B სიმრავლეებში ერთიდაიგივეა. უფრო მარტივი ენით იგივე ფაქტი შეგვიძლია ამგვარად გამოვთქვათ, რომ თუკი წინასწარ ვიცით, რომ საკლასო ოთახში 20 სკამი დგას და გაკვეთილზე შესვლისას ვხედავთ, რომ ყველა სკამზე თითო მოსწავლე ზის, მაშინ მოსწავლეების რაოდენობათა დათვლა ცალკე აღარ არის საჭირო და პირდაპირ შეგვიძლია მივხვდეთ, რომ ისენიც 20-ნი იქნებიან.

შექცეული ფუნქცია.

ეხლა გადავიდეთ შებრუნებული ანუ შექცეული ფუნქციის განხილვაზე. ეს ცნება ნახ. 1-ის მეშვეობით ფორმალურად შეგვიძლია ასე გამოვხატოთ, რომ შექცეული ფუნქციის მისაღებად საჭიროა ყველა ისარი შევაბრუნოთ. ცხადია ამგვარი განსაზღვრა არ არის ზუსტი და იგი მხოლოდ არსის ინტუიციურ დონეზე ჩასაწვდომად მოვიტანეთ. არ არის ზუსტი თუნდაც იმიტომ, რომ ისართა ამგვარი შებრუნებით შეიძლება საერთოდ არ მივიღოთ ფუნქცია, რადგან ერთი წერტილიდან შეიძლება ორი ისარი გამოვიდეს.

მაგალითად ნახ. 1-ზე ისართა შებრუნებით მივიღებთ, რომ 0-დან (ასევე 7-დან) ორი ისარი გამოვა, ერთი -1 -ისკენ და მეორე 3 -ისკენ. როგორც გვახსოვს ეს ფუნქციისათვის დაუშვებელია. მაშასადამე ყველა ფუნქციისთვის მისი შექცეული არ განიმარტება. იმისთვის რომ $f: A \rightarrow B$ ფუნქციის შებრუნებული ფუნქცია განვსაზღვროთ, ამისთვის f უნდა იყოს ურთიერთცალსახა ასახვა A და B სიმრავლეებს შორის. როგორც წესი შებრუნებული ფუნქცია f^{-1} -ით აღინიშნება (ფორმალურად ეს აღნიშვნა ისევე გამოიყურება როგორც რიცხვის შებრუნებული, $5^{-1} = \frac{1}{5}$, თუმცა შინაარსში დიამეტრიული განსხვავებაა და არ უნდა აგვერიოს $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$). თუკი ურთიერთცალსახა f ფუნქციით x აისახება y -ში, მაშინ f^{-1} -ით y აისახება x -ში, ანუ თუ x წყვილდება y -თან f -ით, მაშინ f^{-1} -ით უკვე y წყვილდება x -თან. ცხადია, რომ ამ დროს განსაზღვრის და მნიშვნელობათა არეები ადგილებს შეცვლიან, ანუ f^{-1} -ისთვის B გახდება განსაზღვრის არე, ხოლო A -მნიშვნელობათა არე. იგივე მოსდით ანასახებსა და წინარესახებს, რაც ფორმალურად წინარესახის აღნიშვნაშიც, $f^{-1}(B)$, გამოიხატება. ხშირად, როცა f არ არის ურთიერთცალსახა, ჯერ ფუნქციას შეზღუდავენ განსაზღვრის არის რაიმე ქვესიმრავლეზე, რათა ის გახდეს ურთიერთცალსახა, ხოლო შემდეგ შეაბრუნებენ. ამგვარად მიიღება თითოეული ტრიგონომეტრიული ფუნქციის შექცეული ფუნქცია $\arccos = \cos^{-1}: [-1; 1] \rightarrow [0; \pi]$, $\arcsin = \sin^{-1}: [-1; 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arctan = \tan^{-1}: (-\infty; \infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ და $\operatorname{arccot} = \cot^{-1}: (-\infty; \infty) \rightarrow (0; \pi)$.

არსებობს ფორმალური წესი, რომლითაც შეიძლება ფორმულით მოცემული ურთიერთცალსახა ფუნქციის შექცეული ფუნქციის პოვნა. ვთქვათ მოცემულია ფუნქცია

$$y = f(x) = 2x + 5. \quad (3)$$

გამოვსახოთ x y -ით

$$x = \frac{y-5}{2}, \quad (4)$$

ხოლო შემდეგ x და y ცვლადებს შევუცვალოთ ადგილები:

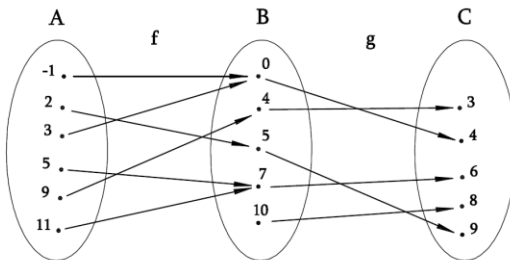
$$y = \frac{x-5}{2} \text{ ე.ი. } f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}. \quad (5)$$

ამ წესის სამართლიანობის შემჩნევა სწორედაც ფუნქციის როგორც წყვილების ერთობლიობის წარმოდგენით შეიძლება. მაგალითად $x = 1$ -ის ჩასმით (3) ტოლობაში ვღებულობთ $y = 7$ -ს, ანუ f ფუნქციით 1 წყვილდება 7 -თან რაც იგივეა, რომ $(1; 7)$ შედის f -ით შექმნილი წყვილების ჩამონათვალში (სიმრავლეში). ვინაიდან (4) ტოლობაზე გადასვლით თავდაპირველი ფორმულის შინაარსში არავითარი ცვლილება არ მომხდარა $x = 1$ და $y = 7$ რიცხვები ისევ აკმაყოფილებენ ამ ტოლობას. ეხლა თუ გვინდა, რომ ეს ტოლობა გამოხატავდეს არა 1 -ის 7 -თან დაწყვილებას არამედ 7 -ის 1 -თან, როგორც ამას f^{-1} აკეთებს, (4) ტოლობაში x და y ცვლადებს ადგილი უნდა შევუცვალოთ რითაც, მივიღებთ (5)-ს. მართლაც ვხედავთ, რომ $(7; 1)$ შედის f^{-1} -ით გაჩენილი წყვილების სიმრავლეში.

შევნიშნოთ, რომ თუ f ფუნქციის შექცეული არის f^{-1} , მაშინ f^{-1} -ის შექცეული არის f .

ფუნქციათა კომპოზიცია.

უკვე შეჩვეული ისრების ენაზე შეგვიძლია მარტივად ავხსნათ ფუნქციათა კომპოზიცია.



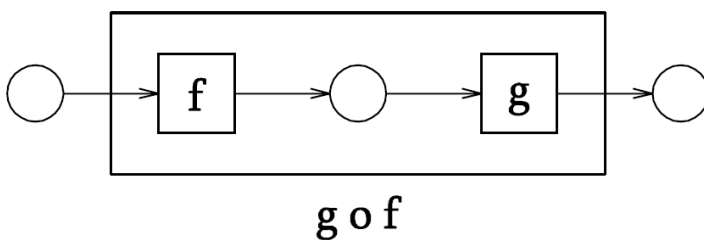
მოდით ნახ. 1-ზე განხილულ $f: A \rightarrow B$ ფუნქციასთან ერთად განვიხილოთ რაიმე $g: B \rightarrow C$ ფუნქცია და ისენი ერთ ნახატზე გამოვხატოთ. f და g ფუნქციების კომპოზიცია ნიშნავს, რომ A სიმრავლის წერტილები ჯერ f -ის ისრებით გადავლენ C -ში, ხოლო შემდეგ g -ს ისრებით გადავლენ C -ში და საბოლოოდ A სიმრავლის ყოველი წერტილი იპოვის თავის მეწყვილეს C -ში.

(მაგალითად 3 ჯერ გადავა 0-ში, ხოლო შემდეგ 4-ში, ე.ი. 3 საბოლოოდ გადავა 4-ში, 5--6-ში, 9--3-ში და ა.შ.). მაშასადამე f და g ფუნქციების კომპოზიცია არის ახალი ფუნქცია A -დან C -ში, რომელიც ზემოთ აღწერილი წესით მოქმედებს. ეს ფუნქცია ამგვარად ჩაიწერება $g \circ f$. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ეს ჩანაწერი შებრუნებულად მარჯვნიდან მარცხნივ იკითხება. ანუ იგი არის f -ის და g -ს კომპოზიცია და არა g -ს და f -ის. ამგვარი ჩაწერის მიზეზი იმით აიხსნება, რომ იგი ამარტივებს ფუნქციათა კომპოზიციის ზუსტ ჩანაწერს ფორმულების მეშვეობით

$$g \circ f(x) = g(f(x)). \quad (6)$$

თუ გავიხსენებთ $f(x)$ ჩანაწერის შინაარსს, მაშინ $g(f(x))$ აღნიშნავს g ფუნქციის მნიშვნელობას $f(x)$ წერტილში და (6) ფორმულით ფუნქციათა კომპოზიციის იმავე განსაზღვრას მივიღებთ, რაზეც მანამდე ვლაპარაკობდით. საზოგადოდ ნებისმიერად აღებული f და g ფუნქციებისთვის, თუკი f -ის მნიშვნელობათა სიმრავლე არ არის g -ს განსაზღვრის არის ქვესიმრავლე, $E_f \not\subset D_g$, f -ის და g -ს კომპოზიცია არ არსებობს რადგან ზემო აღნიშნული ხერხით f -ის განსაზღვრის არის ყოველი წერტილისათვის ვერ ვიპოვით მის მეწყვილეს კერძოდ ნახ. 7 გამოსახული ფუნქციებისათვის $f \circ g$ არ არსებობს. ეს მაგალითი კიდევ უფრო ცხადყოფს რომ ორი ფუნქციის კომპოზიციის განხილვისას ამ ფუნქციების თანმიმდევრობას არსებითი მნიშვნელობა აქვს. იოლად შეგვიძლია მოვიყვანოთ იმგვარი მაგალითიც, რომ f -ისა და g -ს კომპოზიციაც არსებობდეს და g -სა და f -ისაც, მაგრამ $g \circ f \neq f \circ g$.

ფუნქციათა კომპოზიციის ცნება შეგვიძლია მეტაფორული „შავი ყუთებითაც“



გავიაზროთ. თუ პირველი ფუნქციის გამომავალ არხს პირადად შევაერთებთ მეორე ფუნქციის შემავალ არხთან და ამ მოწყობილობას როგორც ერთ მთლიან აგრეგატს ისე განვიხილავთ, მივიღებთ ამ ფუნქციათა კომპოზიციას.

სქემატურად ეს ნახ. 8-ზეა გამოხატული. ამ სქემიდანაც ცხადია, რომ $E_f \subset D_g$ პირობა

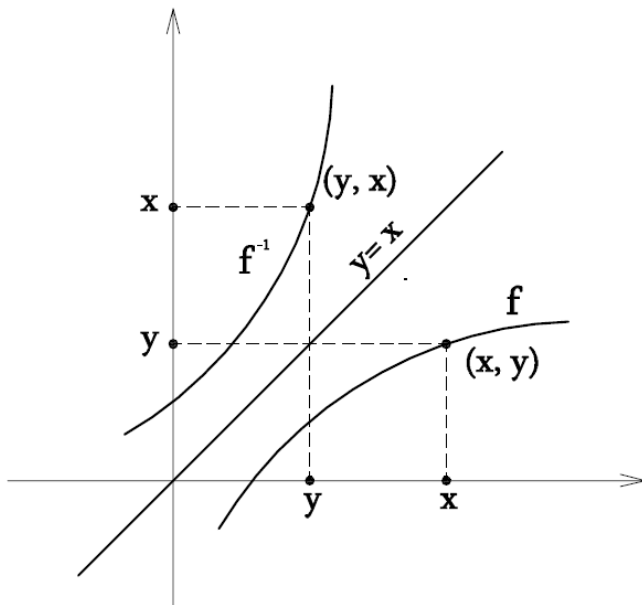
აუცილებელია, რათა ამ მოწყობილობამ გამართულად იმუშაოს და D_f -ის ყოველი წერტილის შეყვანის შემდეგ მოგვცეს გამომავალი მნიშვნელობა.

შევნიშნოთ, რომ თუ $f: A \rightarrow B$ ურთიერთცალსახა ფუნქციაა, მაშინ $f^{-1} \circ f = I_A$ და $f \circ f^{-1} = I_B$ სადაც I_A -თი აღნიშნული A -ზე განსაზღვრული იგივური ფუნქცია (იგივური ფუნქციით ყოველ წერტილს შეესაბამება საკუთარი თავი) და ანალოგიურად -- I_B -თი. ამ დამოკიდებულებების სამართლიანობა უშუალოდ უნდა გაიზაროს მკითხველმა, რითაც კიდევ უფრო განამტკიცებს თავად შექცეული ფუნქციებისა და ფუნქციათა კომპოზიციის შესახებ არსებულ ცოდნას.

თუ f და g ფუნქციები ფორმულითაა განსაზღვრული და გვთხოვენ $g \circ f$ ფუნქციის ფორმულით წარმოდგენას, მაშინ უშუალოდ (6) ფორმულით უნდა ვისარგებლოთ. მაგალითად თუ $f(x) = 2x + 5$ და $g(x) = \frac{1}{2}(x - 5)$ (იხ. (3) და (5)) მაშინ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(2x + 5) = \frac{1}{2}((2x + 5) - 5) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$ როგორც ეს მოსალოდნელი იყო,

რადგან როგორც ადრე ვნახეთ $g = f^{-1}$ (იხ. (5)).

თუკი f (ინექციური) ფუნქციის გრაფიკი საკოორდინატო სიბრტყეზეა წარმოდგენილი, მაშინ f^{-1} -ის გრაფიკი მიიღება f -ის ღერძული სიმეტრიით I და III მეოთხედებზე გამავალი ბისექტრისის მიმართ. მართლაც ამ სიმეტრიით OX ღერძი გადადის OY ღერძში და პირიქით OY ღერძი -- OX ღერძში, ასევე (x, y) წერტილი -- (y, x) -ში. ამიტომ, თუკი (x, y) ეკუთვნის f -ის გრაფიკს, რაც როგორც გვახსოვს ხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $y = f(x)$, გვექნება რომ მისი სიმეტრიული

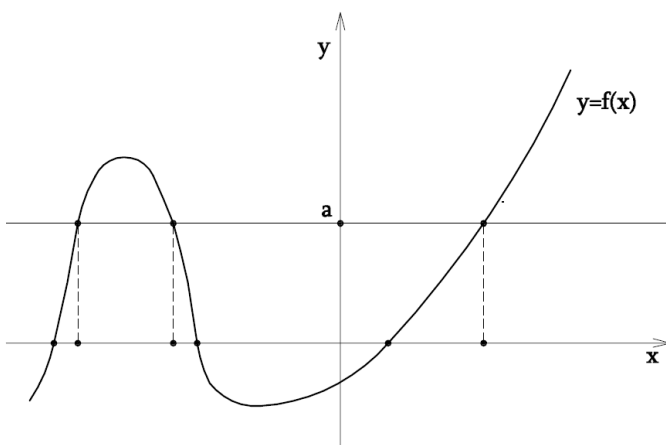


წერტილი (y, x) იქნება f^{-1} -ის გრაფიკზე, რადგან ამ დროს $x = f^{-1}(y)$. ამ გეომეტრიულად მოსახერხებელ ფაქტს ხშირად ვიყენებთ f^{-1} -ის გრაფიკის ასაგებად, როცა ცნობილია f -ის გრაფიკი. სანიშნოდ ავაგოთ $y = 2x + 5$ და $y = \frac{x-5}{2}$ ფუნქციების გრაფიკები ერთიდაიმავე საკოორდინატო სიბრტყეში და ვანხოთ, რომ ისენი მართლაც ერთმანეთის სიმეტრიულია $y = x$ წრფის მიმართ.

ფუნქციებთან დაკავშირებული ამოცანები.

ფუნქციებისა და მათი გრაფიკების შესახებ უკვე დაგროვილი ცოდნის ფარგლებში და ამ ცოდნის განსამტკიცებლად უამრავი საინტერესო ამოცანა შეიძლება დავსვათ და ამოვხსნათ. მოდით ამ საკითხის განხილვით დავიწყოთ. $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილები, რატომ არის $f(x) = 0$ განტოლების ამონახსნები?

(მაგალითად $y = x^2 - x - 6$ ფუნქციის OX ღერძთან გადაკვეთის წერტილებია $(-2;0)$ და $(3;0)$ და მართლაც თუკი სათანადო ფორმულებით ამოვხსნით $x^2 - x - 6 = 0$ განტოლებას, მივიღებთ პასუხებს $x_1 = -2$ და $x_2 = 3$.) თუ ამ კითხვაზე პასუხის გაცემა არ შეგვიძლია, ეს ნიშნავს, რომ კიდევ ერთხელ უფრო დაკვირვებით უნდა წავიკითხოთ გადმოცემული მასალა. ე.ი. გადაგვაიწყადა რას ნიშნავს განტოლების ამონახსნი (სამწუხაროდ ხშირად, იმ მოსწავლეებსაც კი, რომლებსაც შეუძლიათ განტოლებათა ამოხსნა, ყურადღების მიღმა რჩებათ რას ეწოდება განტოლების ამონახსნები). ან სათანადო ყურადღება არ მივაქციეთ f ფუნქციის გრაფიკით როგორ იძებნება რაიმე x წერტილის შესაბამისი $f(x)$ წერტილი. ამონახსნი ხომ სწორედ ისეთ x_0 რიცხვს ეწოდება,



რომელიც განტოლებას გადააქცევს ჭეშმარიტ ტოლობად, როცა მას ჩავსვამთ ცვლადის მაგივრად, ე.ი. $f(x_0) = 0$. მეორეს მხრივ რიცხვის ჩასმით ცვლადის მაგივრად მივიღებთ ფუნქციის მნიშვნელობას ამ რიცხვში, ე.ი. $f(x_0)$ -ს. მაშასადამე, ამონახსნში ფუნქციის მნიშვნელობა უდრის 0-ს და თავის მხრივ ეს ნიშნავს, რომ $(x_0; 0)$ ძევს ფუნქციის გრაფიკზე. რაღა

თქმა უნდა ის ძევს OX ღერძზეც და მაშასადამე ეკუთვნის გრაფიკისა და OX ღერძის თანაკვეთას.

ანალოგიური მსჯელობის ჩატარებით უნდა შეგვეძლოს $f(x) = a$ განტოლების გრაფიკულად ამოხსნა, სადაც a რაიმე მოცემული რიცხვია. ცხადია ამისთვის ჯერ უნდა ვიპოვოთ $(0; a)$ წერტილზე გამავალი OX ღერძის პარალელური წრფის გადაკვეთის წერტილები გრაფიკთან და შემდეგ ეს წერტილები დავაგეგმილოთ OX ღერძზე. გრაფიკის მიხედვით უნდა შეგვეძლოს $f(x) > 0$, $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq a$, და ა.შ. ტიპის უტოლობების ამოხსნა. აგრეთვე $f(x) = g(x)$, ან $f(x) \geq g(x)$ ტიპის განტოლებების და უტოლობების ამოხსნაც.

შემდეგი ტიპი ამოცანებისა წარმოიქმნება, როდესაც ვიცით $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკი და გვინდა ავაგოთ ჩამოთვლილი ოთხი ფუნქციიდან რომელიმეს გრაფიკი: ა) $y = f(x) + a$, ბ) $y = f(x + a)$, გ) $y = a \cdot f(x)$ და დ) $y = f(ax)$. (აქ a რაიმე რიცხვია, რომელიც შეიძლება იყოს როგორც დადებითი ისე უარყოფითი.) ჩამოთვლილი ფუნქციების გრაფიკების აგებისას ისევ და ისევ კარგად უნდა გავიხსენოთ თუ რას ნიშნავს, რომ სიბრტყის მოცემული წერტილი ეკუთვნის მოცემულ გრაფიკს. თუ ვიცით, რომ $(x; y)$ წერტილი ეკუთვნის $y = f(x)$ ფუნქციის გრაფიკს, მაშინ უშუალოდ შეგვიძლია მივუთითოთ ის ოთხი წერტილი, რომლებიც შესაბამისად ეკუთვნიან ზემოთ დაწერილი ოთხი ფუნქციის გრაფიკებს ა) $(x; y + a)$ ბ) $(x - a; y)$ გ) $(x; ay)$ დ) $(\frac{x}{a}; y)$. ეხლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ $(x; y)$ გრაფიკის ნებისმიერი წერტილია და დავაკვირდებით

რა მიმართებაშია ეს წერტილი ამ ჩამოთვლილ ოთხ წერტილთან, მივიღებთ დასმულ ამოცანაზე პასუხს. ჩამოვწეროთ ეს პასუხები იმ დაშვებაში, როცა $a > 1$. კერძოდ, შესაბამისი ფუნქციის გრაფიკი: ა) აიწევს a -თი ზევით, ბ) გაიწევს a -თი მარცხნივ, გ) გაიწელება a -ჯერ OY ღერძის მიმართულებით, დ) შეიკუმშება a -ჯერ OX ღერძის მიმართულებით. შევეცადოთ კარგად გავიაზროთ ეს სიტუაციები და თავად გავცეთ სწორი პასუხი ამ ამოცანას a -ს დარჩენილი მნიშვნელობებისათვის, რითაც კიდევ უფრო განვიმტკიცებთ ჩვენს ცოდნას ფუნქციების შესახებ.

ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა.

სტატიის მიწურულს ფუნქციის ზუსტ მათემატიკურ განსაზღვრებას შევხებით, რითაც საშუალება გვექნება ოდნავ უფრო რთული ცნებაც „მიმართება“ განვსაზღვროთ და საბოლოო ჯამში ავხსნათ ისიც თუ რა არის „ექვივალენტობის მიმართება“. მართალია ეს უკანასკნელი ცნებები არ შედის სასკოლო პროგრამაში, მაგრამ ისინი მათემატიკური განათლების განუყოფელ ნაწილს წარმოადგენენ და მათი შესწავლა დაგვეხმარება ძირითადი მათემატიკური ცნებების (როგორიცაა სიმრავლე, ტოლობა, ფუნქცია) კიდევ უფრო უკეთ გააზრებაში. სანამ ფუნქციის ზუსტ განსაზღვრას შევუდგებოდეთ, სიმრავლის ცნება გავიხსენოთ. სიმრავლე სწორედაც უმარტივესი, ანუ საწყისი ცნებაა და მისი ზუსტი მათემატიკური განსაზღვრება არ არსებობს (როგორაც ამაზე საუბარი გვქონდა სტატიის დასაწყისში). ჩვენ შეგვიძლია მხოლოდ ჩვენი სიტყვებით, მაგრამ არა ორაზროვნად, ავხსნათ ეს მცნება რათა ერთიდაიგივე თვალსაზრისი ჩამოგვიყალიბდეს მის შესახებ. „სიმრავლე ეს არის რაღაც ობიექტების ერთობლიობა, გროვა განხილული როგორც ერთი მთლიანი“. თვითონ ამ ობიექტებს სიმრავლის ელემენტებს ვუწოდებთ (ელემენტის, როგორც შემადგენელი ნაწილის გაგებით). იგულისხმება, რომ ეს ობიექტები თავისთავად არსებობენ და მათი ერთი დაკვირვების სფეროში მოქცევით, ანუ გარკვეული ლოგიკური ნაბიჯით, ვღებულობთ სიმრავლეს. (ამგვარი თვალსაზრისით აიხსნება ის ფაქტი, რომ სიმრავლეში დაუშვებელია რაიმე ელემენტი ორჯერ ან მეტჯერ მეორდებოდეს). ეს თვალსაზრისი დაგვეხმარება იმის მიხედვით, რომ მოცემული სიმრავლეებიდან (სიმრავლის მოცემა ნიშნავს, რომ ნებისმიერ ელემენტზე უნდა შეგვეძლოს თქმა ეკუთვნის თუ არა ამ სიმრავლეს) ახალი სიმრავლეების შედგენა, როგორიცაა გაერთიანება, თანაკვეთა, დეკარტული ნამრავლი და სხვ. სწორედაც ამგვარ ლოგიკურ ნაბიჯებს წარმოადგენენ.

ფუნქციის ცნების განსაზღვრისთვის ჩვენ დაგვჭირდება დეკარტული ნამრავლის გახსენება და ამიტომაც დაწვრილებით შევჩერდებით მის განსაზღვრაზე. ჩვენ მას ძალიან ხშირად ვაწყდებით მათემატიკაში, ასე რომ შეიძლება მხოლოდ მისი სახელი აღმოჩნდეს მკითხველისთვის უცნობი ან დავიწყებული.

A და B სიმრავლეების დეკარტული ნამრავლი ეწოდება ყველა შესაძლო დალაგებული წყვილების სიმრავლეს, სადაც წყვილის პირველი ელემენტი აიღება A -დან, ხოლო მეორე -- B -დან, ე.ი. $A \times B = \{(a; b): a \in A, b \in B\}$ მაგალითად, თუკი $A = \{-1, 0, 2\}$ და $B = \{1, 2\}$ მაშინ $A \times B = \{(-1; 1), (-1; 2), (0; 1), (0; 2), (2; 1), (2; 2)\}$. ამ განსაზღვრაში რთული არაფერია. უბრალოდ ყურადღება უნდა მივაქციოთ იმ ფაქტს, რომ ორი სიმრავლიდან შევადგინეთ ერთი, მაგრამ განსხვავებული ბუნების მქონე ელემენტებისგან (წყვილი,

როგორც ერთი ობიექტი, შედის ელემენტად დეკარტულ ნამრავლში) შემდგარი, სიმრავლე. დეკარტული ნამრავლის კლასიკური მაგალითია საკოორდინატო სიბრტყე, რომელიც წარმოადგენს რიცხვთა სიმრავლის თავის თავზე დეკარტულ ნამრავლს. მართლაც ყოველი წერტილი ჩვენ გაიგივებული გვაქვს რიცხვთა დალაგებულ წყვილთან, ანუ დეკარტული ნამრავლის ელემენტთან და პირიქით, რიცხვთა ნებისმიერი წყვილისთვის გვაქვს სათანადო წერტილი საკოორდინატო სიბრტყეზე. დეკარტული ნამრავლის შედგენით ჩვენ წინასწარ ვიხილავთ ყველა შესაძლო დაწყვილებებს, რაც აქტიურად მონაწილეობდა ფუნქციის ცნების ჩამოყალიბებისას. ამიტომ გასაკვირი არაა, რომ კავშირები რომლებსაც ფუნქცია ამყარებს ელემენტებს შორის და რომლებიც ჩვენ სხვა ტერმინებთან ერთად „დაწყვილებითაც“ მოვიხსენიეთ, ზუსტ ფორმას სწორედ დეკარტული ნამრავლის სახით იძენს. მაშასადამე ფუნქციის ზუსტი განსაზღვრა ამგვარ სახეს იღებს: *“ $f: A \rightarrow B$ ფუნქცია ეწოდება $A \times B$ -ის ისეთ ქვესიმრავლეს (ამ ქვესიმრავლეს იმავე f -ით აღვნიშნავთ, რამაც გაუგებრობა არ უნდა გამოიწვიოს), რომელსაც შემდეგი თვისება აქვს, რომ ყოველი a ელემენტისთვის A -დან არსებობს ერთადერთი ისეთი b ელემენტი B -დან, რომლისთვისაც $(a; b) \in f$ ”*. ამ განსაზღვრით ფუნქციის არავითარი თვისობრივი სიახლე არ შემოგვიტანია, უბრალოდ დავაფუძნეთ ეს ცნება სიმრავლეთა თეორიით მათემატიკაში შექმნილ მკაცრ ფუნდამენტს. როგორც ობიექტი, ფუნქცია აღმოჩნდა სიმრავლე, თუმცა უფრო რთული ბუნების ვიდრე ეს მისი განსაზღვრის არეა ან მნიშვნელობათა სიმრავლე. კერძოდ, რა ელემენტებისგანაც შედგება განსაზღვრის არე და მნიშვნელობათა სიმრავლე, თვითონ ფუნქცია შედგება ამ ელემენტების დაწყვილებით მიღებული ელემენტებისგან. მოსწავლეებისთვის კარგი სავარჯიშო იქნება ფუნქციის ამ ახალი განსაზღვრის ტერმინებში გამოვთქვათ რას ნიშნავს, მაგალითად, ურთიერთცალსახა ფუნქცია, მებრუნებული ფუნქცია და ა.შ.

ექვივალენტობის მიმართება.

თუკი ფუნქციის ზუსტი ცნების განსაზღვრა ძაან არ გვეუცხოვა, ჩვენთვის უკვე იოლი იქნება კიდევ ერთი ახალი ცნების „მიმართების“ ჩამოყალიბება და გააზრება. ეს ცნება უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობს მათემატიკის სიდრმისეულ გაგებაში, ასევე პროგრამირების შესწავლაზე ორიენტირებული მოზარდების შესაფერისი ლოგიკური უნარ-ჩვევების ჩამოყალიბებაში. *“ A და B სიმრავლეებს შორის მიმართება ეწოდება $A \times B$ -ის უკვე ნებისმიერ ქვესიმრავლეს”, ანუ მიმართება აკავშირებს A სიმრავლის ზოგიერთ ელემენტებს B სიმრავლის ელემენტებთან, კერძოდ a უკავშირება b -ს თუკი $(a; b)$ წყვილი ეკუთვნის ამ მიმართებას, ანუ შედის ამ ქვესიმრავლეში. მაგალითად, საკოორდინატო სიბრტყეზე აღებული ნებისმიერი ფიგურა (როგორც გვახსოვს, ფიგურა არის წერტილთა სიმრავლე, ანუ სიბრტყის ქვესიმრავლე) გამოდის რიცხვებს შორის მიმართება. ცხადია, ყოველი ფუნქციაც არის მიმართება.*

მიმართებათა შორის უმნიშვნელოვანეს როლს თამაშობს ეგრეთწოდებული „ექვივალენტობის მიმართება“. ვიტყვით, რომ რაიმე A სიმრავლეზე გვაქვს ექვივალენტობის მიმართება S , თუკი იგი არის $A \times A$ -ს ქვესიმრავლე (ანუ არის მიმართება A -ს ელემენტებს შორის), რომელსაც აქვს შემდეგი სამი თვისება: 1) *რეფლექსურობა*, ანუ ყოველი ელემენტი თავის თავის ექვივალენტურია, $(a; a) \in S$

ყოველი a -თვის A -დან. 2) *სიმეტრიულობა*, ანუ თუ a ექვივალენტურია b -სი მაშინ b -ც ექვივალენტურია a -სი, $(a; b) \in S \Rightarrow (b; a) \in S$; 3) *ტრანზიტულობა*, ანუ თუ a ექვივალენტურია b -სი და b – c -სი, მაშინ a ექვივალენტურია c -სიც, $(a; b) \in S$ და $(b; c) \in S \Rightarrow (a; c) \in S$. ექვივალენტობის მიმართების დროს ხშირად a -ს და b -ს ექვივალენტობას წერენ ამგვარად $a \sim b$.

ექვივალენტობის მიმართების კლასიკური ნიმუშებია, მაგალითად მთელ რიცხვთა სიმრავლეზე, გაყოფადობის ნიშნით შემოტანილი მიმართება. ავიღოთ ნებისმიერი მთელი რიცხვი, ვთქვათ 7, და ორ მთელ რიცხვს ვუწოდოთ ექვივალენტური თუკი მათი სხვაობა (უნაშთოდ) იყოფა 7-ზე. ამგვარად, სანიმუშოდ $1 \sim 8$, $-3 \sim 4$, და ა.შ. (შეამოწმეთ, რომ ეს მიმართება აკმაყოფილებს სამივე ზემოთ მოყვანილ თვისებას) 7-ის მაგივრად რომ რაიმე სხვა რიცხვი აგვედო, მივიღებდით განსხვავებულ ექვივალენტობის მიმართებას. (განიხილეთ ამგვარი მიმართება ზოგადად n -ისთვის). ექვივალენტობის მიმართებაა აგრეთვე სიბრტყეზე განლაგებული ყველანაირი წრფეების სიმრავლეში პარალელულობა, ანუ $a \sim b$, როცა $a \parallel b$.

ძირითადი დებულება ექვივალენტობის მიმართების შესახებ არის ის რომ თუ A სიმრავლეზე შემოტანილი გვაქვს ექვივალენტობის მიმართება, მაშინ A იყოფა ე.წ. „ექვივალენტობის კლასებად“. ეს არის A სიმრავლის თანაუკვეთ ქვესიმრავლეების გაერთიანებად წარმოდგენა, სადაც ერთი და იგივე ქვესიმრავლეში ყოველი ორი ელემენტი ერთმანეთის ექვივალენტურია, ხოლო სხვადასხვა ქვესიმრავლეებიდან აღებული ელემენტები არ არიან ექვივალენტურნი. ამ დებულების დამტკიცება მკითხველისთვის მიგვინდვია. იგი არ არის ძნელი. საკმარისია კარგად გავიაზროთ თითოეული ახალი ცნება და ეს დებულება ბუნებრივად ხდება თვალსაჩინო. სანიმუშოდ, მთელ რიცხვთა სიმრავლე დავყოთ კლასებად ზემოთ შემოტანილი ექვივალენტობის მიმართებების მიხედვით (ზოგადად n -ისთვის მივიღებთ n სხვადასხვა კლასს).

მრავალი ცვლადის ფუნქციები.

გამოყენებების თვალსაზრისით, ფუნქციის ცნების უმნიშვნელოვანეს განზოგადოებას წარმოადგენს ე.წ. *მრავალი ცვლადის ფუნქციები*. კერძოდ შევჩერდეთ ორი ცვლადის ფუნქციაზე. ინტუიციურად ამგვარი ფუნქცია შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც ნახ. 2-ზე გამოსახული „შავი ყუთი“, რომელსაც ერთის მაგივრად ორი შემავალი არხი აქვს (გასაგებია, რომ n ცვლადის ფუნქციას ექნება n შემავალი არხი). შემავალ არხებზე მიწოდებულ მნიშვნელობებს შეესაბამება გამომავალ არხზე მიღებული პასუხი.

ორი ცვლადის ფუნქციის ნიმუშს წარმოადგენს მაგალითად

$$f(x; y) = 2x - 3y + 1 \quad (7)$$

ტოლობით განსაზღვრული ფუნქცია. ეს ტოლობა გვეუბნება, რომ მაგალითად ორ ერთად აღებულ რიცხვს 3-ს და 5-ს. (ე.ი. რიცხვთა დალაგებულ წყვილს $(3; 5)$) შეესაბამება $f(3; 5) = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 5 + 1 = -8$. ბუნებრივია იოლად შეგვიძლია გამოვთვალოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობები განსაზღვრის არის სხვა წერტილებშიც. მაგრამ რა იქნება ამ ფუნქციის განსაზღვრის არე? ის აღარ იქნება უბრალოდ ყველა რიცხვთა სიმრავლე, არამედ იქნება რიცხვთა დალაგებული წყვილების სიმრავლე, ანუ $R \times R$ დეკარტული ნამრავლი. გვახსოვს, რომ გეომეტრიულად ეს არის საკოორდინატო სიბრტყე და თუკი

მის ყოველ წერტილს თავზე დავადგამთ ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლ სიმაღლეზე აღებულ წერტილს (სიბრტყის პერპენდიკულარული წრფის გასწვრივ დადებითი და უარყოფითი მიმართულებების გათვალისწინებით) მივიღებთ (7) ტოლობით განსაზღვრული ფუნქციის გრაფიკს გამოხატულს სამ განზომილებიან სივრცეში (როგორც გვახსოვს ჩვეულებრივი რიცხვითი ფუნქციის გრაფიკი გამოიხატებოდა ორ განზომილებიან სიბრტყეზე). მაშასადამე სივრცე არის ორი ცვლადის რიცხვითი ფუნქციების გრაფიკთა მდებარეობის ბუნებრივი ადგილი.

ზუსტი განსაზღვრით ორი ცვლადის ფუნქცია A და B სიმრავლეებს შორის იქნება ასახვა $A \times A$ დეკარტული ნამრავლიდან B -ში, მაშასადამე $f: A \times A \rightarrow B$ არის ორი ცვლადის ფუნქცია.

საინტერესოა, რომ რიცხვებს შორის არსებულ ჩვეულებრივ ოპერაციებს (შეკრებას, გამრავლებას, და ა.შ.) შეგვიძლია შევხედოთ როგორც ორი ცვლადის ფუნქციებს. მართლაც შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ, რომ „შეკრების ფუნქციით“ 5-ს და 3-ს შეესაბამება 8, 4-ს და 2-ს -- 6 და ა.შ. აღსანიშნავია, რომ ამ თვალსაზრისის დამკვიდრებით, მივიღებთ თვითონ ოპერაციას ცნების განზოგადოებას. მართლაც ნებისმიერ ორი ცვლადის ფუნქციას $A \times A \rightarrow A$ შეგვიძლია ვუწოდოთ ოპერაცია A სიმრავლეზე. როგორც წესი ამგვარად განსაზღვრული ოპერაციების მიმართ ვითხოვთ ხოლმე გარკვეული თვისებების დაკმაყოფილებას და ვდებულობთ ისეთ აბსტრაქტულ მათემატიკურ ობიექტებს როგორიცაა *ჯგუფი*, *რგოლი*, *ველი* და ა.შ. ავტორი ურჩევს მკითხველთ გასკვეული წარმოდგენები შევიძინოთ ამ ობიექტების შესახებ.

